Sistemi linearnih jednačina

October 8, 2019

Sistemi linearnih jednačina

Sistem od *m* linearnih jednačina sa *n* nepoznatih:

$$a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m$$

gde su $a_{ij} \in \mathbb{R}$ **koeficijenti**, x_i **promenljive** (nepoznate) i $b_i \in \mathbb{R}$.

Rešenje sistema linearnih jednačina su brojevi $x_1, ..., x_n$ koji zadovoljavaju sve jednačine.

Sistem linearnih jednačina može da bude:

1. **Određen** - sistem ima jedno rešenje.
2. **Neodređen** - sistem ima više rešenja (beskonačno mnogo).
3. **Nemoguć** - sistem nema rešenja.

Definicija

Dva sistema linearnih jednačina su ***ekvivalentna*** *ako imaju isti skup rešenja.*

Transformacije sistema linearnih jednačina nakon kojih se dobija ekvivalentan sistem (sa istim rešenjem):

1. Zamena dve jednačine.
2. Množenje neke jednačine brojem različitim od nula.
3. Množenje neke jednačine brojem i dodavanjem drugoj jednačini.

Definicija

*Sistem linearnih jednačina je **homogen** ako su na desnoj strani jednačina svi slobodni članovi ($b_i, i = 1, ..., m$) jednaki nula.*

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = 0
\end{gathered}
$$

Homogen sistem ima sigurno bar jedno (trvijalno) rešenje, tj. $x_1 = ... = x_n = 0$.

Sistem linearnih jednačina se može izraziti i matrično u obliku $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gde je:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Teorema

Ako je A invertibilna matrica, onda sistem linearnih jednačina $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ima jedinstveno rešenje $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Dokaz na času.

Gausova metoda eliminacije

Gausovom metodom eliminacije se sistem linearnih jednačina $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, gde je A regularna kvadratna matrica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

transformiše u konačno mnogo koraka u ekvivalentan sistem sa gornje trougaonom matricom $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ gde je

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Prvi korak Gausove metode eliminacije:

$a_{11} \neq 0$: Prvu jednačinu množimo odgovarajućim množiteljima i oduzimamo je od svih ostalih jednačina. Množitelji se određuju tako da se anulira promenljiva x_1 u svim jednačinama osim u prvoj, tj. pri oduzimanju od i-te jednačine množitelj bi bio $\frac{a_{i1}}{a_{11}}, i = 2, ..., n$.

$a_{11} = 0$: Permutujemo jednačine tako što na mesto prve dovodimo jednačinu za koju je $a_{p1} \neq 0$. Taj element sigurno postoji jer je A regularna.

Nakon prvog koraka, dobijen je ekvivalentan sistem $A_1\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ gde je

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

j-ti korak Gausove metode eliminacije:

$a_{jj}^{(j-1)} \neq 0$: *j*-tu jednačinu množimo odgovarajućim množiteljima i oduzimamo je od svih ostalih jednačina "ispod" nje. Množitelji se određuju tako da se anulira promenljiva x_j u svim jednačinama od $(j+1)$-ve do *n*-te, tj. pri oduzimanju od *i*-te jednačine množitelj bi bio $\frac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}}, i = j+1, ..., n$.

$a_{jj}^{(j-1)} = 0$: Permutujemo jednačine tako što na mesto *j*-te jednačine dovodimo jednačinu za koju je $a_{pj}^{(j-1)} \neq 0$.

Nakon *j*-tog koraka, dobijen je ekvivalentan sistem $A_j \mathbf{x} = \mathbf{b}_j$ gde je

$$A_j = \begin{bmatrix} * & ... & * & * & ... & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

Nakon $n-1$ koraka dobijena matrica A_{n-1} je tražena gornje trougaona matrica U, a vektor $\mathbf{b}_{n-1}$ je vektor $\mathbf{c}$.

Ovako dobijen sistem $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$, uz pretpostavku da je $u_{ii} \neq 0$ se direktno može rešiti:

$$x_n = \frac{c_n}{u_{nn}}, \qquad x_i = \frac{1}{u_{ii}}(c_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j), \qquad i = n-1, ..., 1.$$

- Ukoliko se prilikom ovih transformacija desi da dobijemo jednačinu oblika $0 = t,\ t \neq 0$ onda sistem nema rešenje.
- Ukoliko se prilikom ovih transformacija desi da dobijemo jednačinu oblika $0 = 0$ onda sistem ima beskonačno mnogo rešenja.

U j-tom koraku element $a_{jj}^{(j-1)}$ nazivamo **glavnim elementom** ili **pivotom**.

Zbog numeričke stabilnosti algoritma obično se za pivot bira element koji je najveći po modulu i to razlikujemo:

- **Delimično pivotiranje**: za pivot biramo najveći po modulu element iz jedne kolone matrice.
- **Potpuno pivotiranje**: za pivot biramo najveći po modulu element iz cele matrice.

Ako se u prvom koraku vrši delimično pivotiranje i ako je pivot u k-toj jednačini, onda je potrebno permutovati prvu i k-tu jednačinu (prvu i k-tu vrstu matrice).

Ako se u prvom koraku vrši potpuno pivotiranje i ako je pivot u k-toj jednačini uz x_q, onda je potrebno permutovati prvu i k-tu vrstu kao i prvu i q-tu kolonu matrice A.

Kramerovo pravilo

Kramerovo pravilo koristi determinante za rešavanje sistema linearnih jednačina $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sa kvadratnom matricom sistema $A = [a_{ij}]_{n \times n}$.

Oznake:

$$D = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$D_j, j = 1, ..., n$ se formiraju tako što se u determinanti sistema j-ta kolona zameni kolonom koju čine slobodni članovi.

Teorema

Neka je $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sistem n jednačina sa n nepoznatih. Ako je $D \neq 0$ onda sistem ima jedinstveno rešenje:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, ..., x_n = \frac{D_n}{D}.$$

- Ako je $D = 0$ i postoji bar jedno $D_j \neq 0$ onda sistem nema rešenja.
- Ako je $D = 0$ i $D_j = 0$ za svako j onda sistem ili nema rešenja ili ima beskonačno mnogo rešenja.

Kroneker-Kapelijeva teorema

Neka je $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sistem m linearnih jednačina sa n nepoznatih, sa matricom koeficijenata

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Formirajmo matricu $\overline{A}$ dimenzije $m \times (n+1)$ dodajući vektor $\mathbf{b}$ matrici A kao poslednju, $(n+1)$-vu kolonu, tj.

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Za matricu $\overline{A}$ kažemo da je **proširena matrica** sistema.

Teorema

Sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih ima rešenje akko je rang njegove matrice koeficijenata jednak rangu njegove proširene matrice, tj. $rang(A) = rang(\overline{A})$.

Posledica

1. *Ako je* $rang(A) = rang(\overline{A}) = n$ *onda postoji jedinstveno rešenje sistema.*
2. *Ako je* $rang(A) < rang(\overline{A})$ *onda sistem nema rešenja.*
3. *Ako je* $rang(A) = rang(\overline{A}) < n$ *onda postoji beskonačno mnogo rešenja sistema.*

Teorema

Neka je $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *homogen sistem m linearnih jednačina sa n nepoznatih gde je* $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ *matrica koeficijenata.*

1. *Ako je* $\mathrm{rang}(A) = n$ *tada je trivijalno rešenje jedino rešenje homogenog sistema.*
2. *Homogeni sistem ima i netrivijalno rešenje akko je* $\mathrm{rang}(A) < n$.

Dokaz na času.